جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات و پاسخ تشریحی
مرحله اول
هفدهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۷۷

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۳۰	-	۱۲۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۰ سوال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

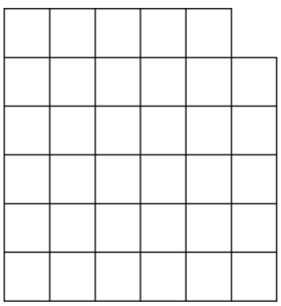
۱- اگر $n \geq 2$ عددی طبیعی و $2^n + n^2$ عددی اول باشد، باقیمانده n بر ۶ کدام‌یک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) الف و ب هـ) ب و ج

۲- در مثلث ABC ارتفاع وارد بر ضلع BC آن را در D قطع می‌کند و ارتفاع وارد بر ضلع CA نیز AD را در H قطع می‌کند. اگر $AD = 4$, $BD = 3$ و $CD = 2$، آن‌گاه طول HD برابر است با:

الف) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\sqrt{5}$ د) $\frac{5}{2}$ هـ) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

۳- در شکل زیر چند مربع وجود دارد؟



الف) ۳۵
ب) ۷۵
ج) ۸۵
د) ۱۰۵
هـ) ۲۰۵

۴- ۵ عدد میله‌ی آهنی به طولهای ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ و ۵۰ داریم. با این میله‌ها به چند صورت می‌توان یک مثلث درست کرد؟

الف) ۳ ب) ۵ ج) ۸ د) ۹ هـ) ۱۰

۵- x و y دو عدد صحیح متوالی هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عبارت $x^2 + y^2 + (xy)^2$ درست است؟

الف) مجموعه‌ی رقمهای یکان آنها شامل مجموعه‌ی $\{0,1,3,5,6,9\}$ است.
ب) همواره مربع کامل است.
ج) به ازای مقادیری از x و y، عددی اول است.
د) همواره عددی مرکب است.
هـ) هیچ‌کدام

۶- دنباله‌ی a_n به صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + a_n + n \end{cases}$$

باقیمانده تقسیم a_{101} بر ۱۰۲ چند است؟

الف) صفر ب) ۱ ج) ۹۹ د) ۱۰۰ هـ) ۱۰۱

۷- طول اقطار ذوزنقه‌ای ۱۳ و ۱۵ و ارتفاع آن برابر ۱۲ است. مساحت این ذوزنقه چقدر است؟

الف) ۵۶ ب) ۷۲ ج) ۸۴
د) ۹۶ هـ) با این اطلاعات قابل محاسبه نیست.

۸- بزرگترین توان ۲ که عدد $N=۳^{۵۱۲}-۱$ بر آن بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

الف) $۲^{۸}$ ب) $۲^{۹}$ ج) $۲^{۱۰}$ د) $۲^{۱۱}$ هـ) $۲^{۱۲}$

۹- اعداد طبیعی را مطابق الگوی زیر در یک جدول قرار داده‌ایم. مثلاً ۱۴ در سطر دوم و ستون چهارم آمده است. مکان عدد ۱۳۷۷ کدام است؟

۱	۲	۶	۷	۱۵
۳	۵	۸	۱۴	
۴	۹	۱۳		
۱۰	۱۲			
۱۱				

الف) سطر ۲ ستون ۵۲
ب) سطر ۵۲ ستون ۲
ج) سطر ۲ ستون ۵۱
د) سطر ۵۱ ستون ۲
هـ) هیچ‌کدام

۱۰- چند عدد در مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\{۱۳۷۷,\dots,۱۹۹۹\}$ وجود دارد که برابر تفاضل دو مجذور کامل هستند؟

الف) ۳۱۱ ب) ۳۱۲ ج) ۴۶۶ د) ۴۶۷ هـ) ۶۲۳

۱۱- عددهای ۱، ۲، ... و ۱۳۷۷ روی تخته سیاه نوشته شده‌اند. هر بار دو تا از اعداد روی تخته را به دلخواه پاک می‌کنیم و قدر مطلق تفاضلشان را روی تخته می‌نویسیم، تا زمانی که یک عدد روی تخته باقی بماند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد عدد به دست آمده کامل‌تر است؟

الف) این عدد همواره مضربی از ۴ است.
ب) این عدد همواره فرد است.
ج) باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۴، مساوی یک است.
د) این عدد همواره زوج است.
هـ) هیچ‌کدام

۱۲- در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای درونی عمود است. اگر اندازه اضلاع این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشند، آن‌گاه اندازه محیط این مثلث برابر است با:

الف) ۶ ب) ۹ ج) ۱۵ د) ۱۸ هـ) ۲۱

۱۳- اگر a,b,c,d,e یک ترتیب دلخواه از اعداد $۱,۲,۳,۴,۵$ باشد، در این صورت حداکثر مقدار عبارت $S=ab+bc+cd+de+ea$ به ازای ترتیبهای مختلف چقدر است؟

الف) ۴۲ ب) ۴۳ ج) ۴۵ د) ۴۸ هـ) ۵۰

۱۴- فرض کنید A، B و C سه نقطه در داخل یا روی اضلاع یک مربع به ضلع واحد باشند. اگر داشته باشیم $x=\min\ AB,AC,BC$ (که در آن، min کوچکترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد)، آنگاه حداکثر مقدار x، وقتی که A، B و C داخل یا روی اضلاع مربع تغییر می‌کنند، چیست؟

الف) $\frac{۶}{۵}$ ب) ۱ ج) $\sqrt{۶}-\sqrt{۲}$ د) $\sqrt{۲}$ هـ) $\frac{۴}{۳}$

۱۵- $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ تابعی است یک‌به‌یک و پوشا و به‌علاوه می‌دانیم که m بر n بخش‌پذیر است، اگر و فقط اگر $f(m)$ بر $f(n)$ بخش‌پذیر باشد. کدام گزینه در مورد هر تابع به این شکل درست است؟

الف) $f(n)$ بر n بخش‌پذیر است.
ب) اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه $f(p)=p$
ج) برای هر a و b داریم: $f(ab)=f(a)f(b)$
د) $f(n)\leq n^{۲}$
هـ) $f(f(n))=n$

۱۶- از بین عددهای مجموعه $\{۱,۲,۳,\cdots,۵۳\}$ حداکثر چند عدد می‌توان انتخاب کرد که تفاضل هیچ دوتایی از آنها برابر با ۴ نباشد؟

الف) ۲۶ ب) ۲۷ ج) ۲۸ د) ۲۹ هـ) ۳۰

۱۷- یک تکه مقوای مربع شکل را با قیچی به n تا مربع کوچکتر (نه لزوماً مساوی) بریده‌ایم. n کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۱۱۲ ب) ۱۷۲ ج) ۲۲۲
د) ۳۱۲ هـ) همه‌ی مقادیر الف، ب، ج، و د

۱۸- از میان عددهای $۱,۲,\cdots,۲۰$ حداقل چند عدد را باید حذف کنیم به طوری که مجموع هیچ دو عدد باقی‌مانده، عددی اول نباشد.

الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹ د) ۱۰ هـ) ۱۱

۱۹- فرض کنید $A=\overbrace{۹۹\cdots۹۹}^{۸۱}$. مجموع ارقام $A^{۲}$ در پایه ۱۰ چند است؟

الف) ۶۹۳ ب) ۷۲۹ ج) ۷۹۰ د) ۸۳۷ هـ) ۹۳۶

۲۰- $C_۱$ و $C_۲$ دو دایره به شعاعهای ۳ و ۱ هستند که فاصله بین مرکزهای آنها برابر ۱۰ است. فرض کنید S مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی باشد که یک سر آن روی محیط $C_۱$ و سر دیگر آن روی محیط $C_۲$ است. مساحت S چقدر است؟

الف) ۰ ب) ۳π ج) ۴π د) ۵π هـ) ۶π

۲۱- $A\subseteq\mathbb{N}$ را «خوب» می‌نامیم، هرگاه بتوان اعضای آن را به‌صورت دنباله‌ی $a_۱,a_۲,a_۳,\ldots$ نوشت به‌طوری که هر دو جمله‌ی متوالی مثل a_i و $a_{i+۱}$ دارای مقسوم‌علیه مشترک بزرگ‌تر از ۱ باشند. کدام‌یک از مجموعه‌های زیر خوب نیستند؟

الف) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱
ب) اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱
ج) اعداد طبیعی به صورت $۳k+۲$
د) اعداد مربع کامل بزرگ‌تر از ۱
هـ) هر چهار مجموعه، خوب هستند.

۲۲- در مثلث ABC، D نقطه‌ی وسط AB، و E نقطه‌ای روی BC است به‌طوری که $BE = ۲EC$. فرض کنید $\angle ADC = \angle BAE$. زاویه‌ی $\angle BAC$ چقدر است؟

الف) ۴۵ درجه
ب) ۶۰ درجه
ج) ۷۵ درجه
د) این زاویه به‌طور یکتا مشخص می‌شود ولی هیچ‌کدام از جوابهای بالا درست نیست.
هـ) اطلاعات برای تعیین زاویه کافی نیست.

۲۳- ABC یک مثلث است. D نقطه‌ای روی AB و E نقطه‌ای روی AC است. تقاطع BE و CD را P می‌نامیم. اگر مساحت مثلثهای ADE، BPD و CEP به‌ترتیب ۵، ۸ و ۳ باشد، مساحت مثلث ABC چقدر است؟

الف) ۲۵ ب) ۲۷ ج) ۳۰ د) ۳۲
هـ) اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲۴- فرض کنید $a_n = n^۳ - ۵n^۲ + ۶n, b_n = n^۲ + ۵$ و d_n برابر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a_n و b_n است. کدام گزینه درست است؟ ($\max$ بزرگترین عضو یک مجموعه را نشان می‌دهد.)

الف) d_n متناوب است. ب) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ ج) $\max\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} = ۶۳۰$
د) d_n از جایی به بعد ثابت است. هـ) الف و ج

۲۵- چند عدد گویای t وجود دارد که $۰ \leq t \leq ۷۷$ و $۳t^۳ + ۱۰t^۲ - ۳t$ عددی صحیح باشد؟

الف) ۸۷ ب) ۸۶ ج) ۱۰۰ د) ۱۰۴ هـ) ۲۳۲

۲۶- نقطه‌ی P روی نقاط صفحه xy با مختصات صحیح در حال حرکت است. به این صورت که اگر در نقطه‌ی (a,b) باشد با توجه به اینکه باقیمانده تقسیم $a+b$ بر ۴، برابر ۰، ۱، ۲، یا ۳ است به ترتیب به راست، بالا، چپ، یا پایین می‌رود. فرض کنید P از $P_۰$ شروع به حرکت کرده و پس از ۱۰۰ حرکت به نقطه‌ی $(۰,۱۰)$ رسیده است. به‌ازای چه تعداد $P_۰$ چنین اتفاقی می‌افتد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۲۷- می‌خواهیم ۱۰ عدد سکه را طوری در یک ردیف قرار دهیم که هیچ دو سکه مجاوری به رو نباشند. به چند صورت این کار امکان‌پذیر است؟

الف) ۱۰۰ ب) ۱۲۱ ج) ۱۴۴ د) ۲۴۳ هـ) ۲۵۶

۲۸- چند دوتایی (x,y) از اعداد طبیعی در معادله‌ی $۲x^۲y^۲ + y^۲ = ۲۶x^۲ + ۱۲۰۱$ صدق می‌کند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) این معادله جواب ندارد.

۲۹- به‌ازای کدام دسته از مقادیر n، تابع $f:\{۱,\dots,۳۱\}\to\{۱,\dots,۳۱\}$ وجود دارد که در هر دو شرط زیر صدق می‌کند:

$$(f^i = \overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{i\ \text{مرتبه}})$$

برای هر $x\in\{۱,\dots,۳۱\}$ داریم $f^n(x)=x$ برای هر $۰<i<n$ داریم $f^i(x)=x \Leftrightarrow x=۱$

الف) مجموعه اعداد اول کمتر از ۳۱

ب) $\{۲,۸,۱۶\}$

ج) $\{۲,۳,۱۵\}$

د) $\{۲k+۱ \mid k=۱,۲,\dots,۱۴\}$

هـ) $\{۲,۷,۱۳\}$

۳۰- بزرگترین mای که دنباله‌ای مثل $a_۱,a_۲,\dots,a_m$ با شرایط زیر وجود دارد، چند است؟ $a_i\in\{۱,۲,۳,\dots,۱۰\}$، اگر $a_i=a_j$ و $a_{i+۱}=a_{j+۱}$، آنگاه $i=j$.

الف) ۹۸

ب) ۹۹

ج) ۱۰۰

د) ۱۰۱

هـ) ۱۰۲

پاسخ های تشریحی

۱- گزینه (ب) صحیح است.

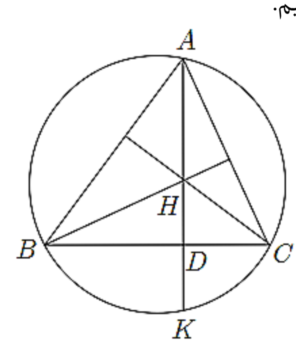
فرض کنید که عدد $m = ۲^n + n^۲$ عددی اول باشد. روشن است که n باید فرد باشد، چون در غیر این‌صورت m زوج خواهد بود. پس n به پیمانه ۶ با یکی از اعداد ۱، ۳ یا ۵ همنهشت خواهد بود. اما توجه کنید که اگر $n \overset{۶}{\equiv} ۱$ آنگاه $n = ۶k + ۱$ و در نتیجه،

$$۲^n \overset{۳}{\equiv} (۲^۶)^k \times ۲ \overset{۳}{\equiv} ۲$$

همچنین، $n^۲ \overset{۶}{\equiv} ۱$ و بنابراین $n^۲ + ۲^n \overset{۳}{\equiv} ۰$ و m اول نخواهد بود. به‌دلیل مشابه $n \overset{۶}{\equiv} ۵$ نیز رد می‌شود و فقط حالت $n \overset{۶}{\equiv} ۳$ باقی می‌ماند.

۲- گزینه (ب) صحیح است.

محل برخورد AD با دایره محیطی مثلث را K می‌نامیم.



دقت کنید که چون H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است،

$$\angle HCB = ۹۰^\circ - \angle ABC = ۹۰^\circ - \angle AKC = \angle BCK$$

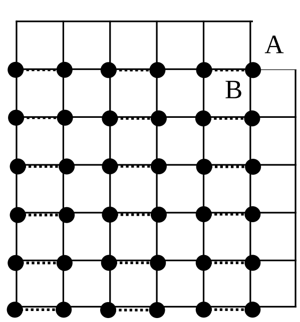
پس در مثلث HCK، ارتفاع و نیمساز برهم منطبق شده‌اند، و درنتیجه، این مثلث متساوی‌الساقین است. پس $HD = DK$. حال قوت نقطه D را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

$$P(D) = BD.CD = DK.DA = HD.DA$$

پس $۴HD = ۳ \times ۲$ و بنابراین، $HD = \frac{۳}{۲}$.

۳- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید که S_k تعداد مربع‌های به ضلع k در شکل زیر باشد.



روشن است که چنین مربعی با مشخص شدن رأس گوشه پایین چپ آن به‌طور یکتا مشخص می‌شود. دقت کنید که هر یک از این نقاط مشخص شده جز A در S_1 شمرده می‌شوند. پس $S_1 = 6^2 - 1$. به‌طور مشابه، هر یک از مربع‌ها غیر از نقاط سطر بالا و ستون راست و همچنین، نقطه B، در محاسبه S_2 به حساب می‌آیند. پس $s_2 = 5^2 - 1$، با استدلال مشابه می‌توان دید که $S_3 = 4^2 - 1, \dots, s_6 = 2^2 - 1$ و $S_7 = 1^2 - 1$. پس اگر N تعداد کل مربع‌ها را نشان دهد، آنگاه

$$N = (1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2) - 6 = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 6 = 85$$

یادداشت. استدلال مشابه نشان می‌دهد که اگر به‌جای جدول 6×6، جدولی $n \times n$ با یک خانه حذف شده در گوشه داشته باشیم تعداد مربع‌ها برابر است با

$$N = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$$

۴- گزینه (الف) صحیح است.

اولاً دقت کنید که میله به‌طول ۱۰ نمی‌تواند در هیچ مثلثی شرکت کند. چون اگر طول اضلاع مثلثی $10 < a < b$ باشند، آنگاه $b - a \geq 10$ و بنابراین، $a + 10 \leq b$. پس $(a, b, 10)$ اضلاع مثلث نیستند. فرض کنید $20 < a < b$ طول اضلاع مثلثی باشند. اگر $a = 30$، آنگاه $b < 20 + a = 50$. پس $b = 40$ و جواب قابل قبول $(20, 30, 40)$ پیدا می‌شود. همین‌طور، اگر $30 < a < b$ طول اضلاع مثلث باشند، لزوماً $a = 40$ و $b = 50$ و جواب قابل قبول $(30, 40, 50)$ به دست می‌آید. پس در مجموع سه مثلث به کمک این میله‌ها ساخته می‌شوند.

۵- گزینه (ب) صحیح است.

فرض کنید $y = x + 1$. در این‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (xy)^2 &= x^2 + (x+1)^2 + (x(x+1))^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 1 + (x(x+1))^2 \\ &= 2x(x+1) + 1 + (x(x+1))^2 \\ &= (x(x+1)+1)^2 \end{aligned}$$

که مربع کامل است.

۶- گزینه (هـ) صحیح است.

اگر تعریف کنیم $b_n = a_n + 1$، آنگاه $b_0 = 0$ و به‌ازای $n \in \mathbb{N}$،

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + 1 \\ &= (n+1)a_n + n + 1 \\ &= (n+1)(a_n + 1) \\ &= (n+1)b_n \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به $b_0 = 1$ داریم،

$$b_n = nb_{n-۱} = n(n-۱)b_{n-۱} = \cdots = n!$$

پس $a_n = n!-۱$. اما دقت کنید که

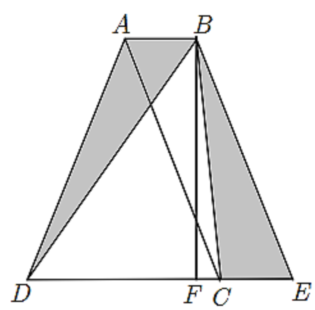
$$۱۰۱ = ۱ \times ۲ \times \cdots \times ۵۱ \times \cdots \times ۱۰۱$$

بر $۱۰۲ = ۲ \times ۵۱$ بخش‌پذیر است. بنابراین،

$$\begin{aligned} a_{۱۰۱} &\overset{۱۰۲}{\equiv} (۱۰۱)!-۱ \\ &\overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۲-۱ \\ &\overset{۱۰۲}{\equiv} ۱۰۱ \end{aligned}$$

-۷ ماخ گزینه (ج) صحیح است.

در ذوزنقه $ABCD$ فرض کنید که $AC = ۱۳$ و $BD = ۱۵$ و ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲ باشد.



از نقطه B به موازات قطر AC خطی رسم می‌کنیم تا امتداد قاعده DC را در نقطه E قطع کند. چون چهارضلعی $ABEC$ متوازی-الاضلاع است، پس $AB = CE$. پس دو مثلث ABD و BCE دارای قاعده و ارتفاع مساوی‌اند. پس مساحت این دو مثلث برابر است.

حال اگر مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} [ABCD] &= [ABD] + [BCD] \\ &= [BCE] + [BCD] \\ &= [BDE] \end{aligned}$$

اگر پای عمود وارد از B بر CD را F بنامیم، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} DE &= DF + EF \\ &= \sqrt{BD^۲ + BF^۲} + \sqrt{BE^۲ - BF^۲} \\ &= \sqrt{۱۵^۲ + ۱۲^۲} + \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} \\ &= ۹ + ۵ \\ &= ۱۴ \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [BDE] \\ &= \frac{۱}{۲}(۱۴ \times ۱۲) \\ &= ۸۴\end{aligned}$$

۸- ماخ گزینه (د) صحیح است.

N را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$N = (۳^{۲۵۶}+۱)(۳^{۱۲۸}+۱)\cdots(۳^{۲}+۱)(۳^{۲}-۱)$$

توجه کنید که به‌ازای هر عدد زوج مانند k،

$$۳^{k}+۱ \overset{۴}{\equiv} (-۱)^{k}+۱ \overset{۴}{\equiv} ۲$$

پس بزرگترین توان ۲ در $۳^{k}+۱$ برابر ۲ است. اما چون بزرگترین توان ۲ در $۳^{۲}-۱$ برابر ۳ است، پس بزرگترین توان ۲ در N برابر $۸+۳=۱۱$ خواهد بود.

یادداشت. استدلالی مشابه استدلال بالا نشان می‌دهد که به‌ازای $n \geq ۳$، توان ۲ در $۳^{۲n}-۱$ برابر $n+۲$ است.

۹- ماخ گزینه (د) صحیح است.

فرض کنید $a_{۰}=۰$ و به‌ازای $i \geq ۱$، $a_{i}=۱+۲+\cdots+i=\frac{i(i+۱)}{۲}$. با توجه به اینکه روی قطر iام دقیقاً i عدد می‌آیند، به آسانی می‌توان دید که قطر iام با عدد $a_{i-۱}+۱$ شروع می‌شود و با عدد i پایان می‌پذیرد. همچنین برای مقادیر زوج i، اولین عدد در قطر iام در سطر اول و برای مقادیر فرد i، اولین عدد در قطر iام، در ستون اول ظاهر می‌شود.

ابتدا قطری را که عدد ۱۳۷۷ در آن قرار دارد پیدا می‌کنیم. باید مقدار i را پیدا کنیم که $a_{i-۱}+۱ \leq ۱۳۷۷ \leq a_{i}$. توجه کنید که اگر

$$\frac{i(i-۱)}{۲}+۱ \leq ۱۳۷۷ \leq \frac{i(i+۱)}{۲}$$

آنگاه

$$۴i^{۲}-۴i+۸ \leq ۱۱۰۱۶ \leq ۴i^{۲}+۴i$$

نابرابری سمت چپ به‌صورت $(۲i-۱)^{۲} \leq ۱۱۰۰۹$ یا $۲i-۱<۱۰۴$ یا $۲i-۱ \leq ۱۰۳$ در می‌آید. پس $i \leq ۵۲$. نابرابری سمت راست به‌صورت $(۲i+۱)^{۲} \geq ۱۱۰۱۷$ یا $۲i+۱>۱۰۴$ یا $۲i+۱ \geq ۱۰۵$ در می‌آید. پس $i \geq ۵۲$. بنابراین، $i=۵۲$. چون $a_{۵۲}=۱۳۷۸$ پس ۱۳۷۷ عدد یکی مانده به آخر در قطر ۵۲ ام است. اما چون ۵۲ زوج است، پس آخرین عدد در این قطر در ستون اول و سطر ۵۲ ظاهر می‌شود. بنابراین عدد ۱۳۷۷ در این جدول در ستون دوم و سطر ۵۱ ظاهر شده است.

۱۰- ماخ گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که عدد طبیعی n را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت اگر و فقط اگر n فرد باشد و یا $۴ \mid n$. در واقع، با توجه به رابطه‌های

$$\begin{aligned}۲k+۱ &= (k+۱)^{۲}-k^{۲} \\ k &= (k+۱)^{۲}-(k-۱)^{۲}\end{aligned}$$

هر یک از اعداد بالا را می‌توان به‌صورت تفاضل دو مربع کامل نوشت. همچنین اگر $n = x^{۲} - y^{۲} = (x-y)(x+y)$، بسته به آن که x و y زوجیت یکسان یا متفاوت داشته باشند، عدد n فرد و یا مضرب ۴ خواهد بود.

پس کافی است اعداد به‌صورت $۴k+۲$ در مجموعه $\{۱۳۷۷,\cdots,۱۹۹۹\}$ را حذف کنیم. اما

$$۱۳۷۷ \leq ۴k+۲ \leq ۱۹۹۹$$

آنگاه

$$۳۴۴ \leq k \leq ۴۹۹$$

پس باید ۱۵۶ عدد از بین $۱۹۹۹-۱۳۷۶ = ۶۲۳$ عدد را حذف کنیم و ۴۶۷ عدد باقی می‌ماند.

۱۱- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

دو تا از عددها را x و y می‌نامیم اگر مجموع اعداد قبل و بعد از حذف x و y را به‌ترتیب با S و S' نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$S' = S + |x-y| - x - y \overset{۲}{\equiv} S + x - y - x - y \overset{۲}{\equiv} S$$

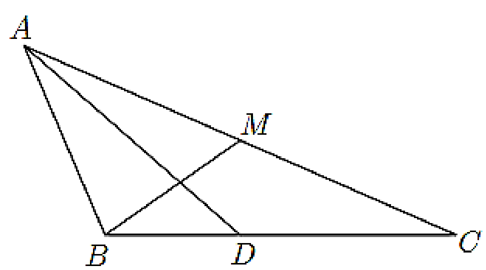
پس چون $۱+۲+\cdots+۱۳۷۷$، یعنی ۶۸۹×۱۳۷۷، عددی فرد است و زوجیت S هربار ثابت می‌ماند، پس عدد نهایی باید فرد باشد.

گزینه (ج) نادرست است. توجه کنید که دنباله $۱,۲,\ldots,i+۴$ را می‌توان با سه‌گام به دنباله $۱,۲,\ldots,i$ تبدیل کرد. برای این کار ابتدا $i+۴$ و $i+۳$ و سپس $i+۲$ و $i+۱$ را حذف می‌کنیم و در گام سوم دو عدد ۱ به‌دست آمده را حذف می‌کنیم. با تکرار این کار می‌توان به دنباله ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ رسید. اگر فرایند حذف i و j را با $\xrightarrow{ij}$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم

$$۱,۲,۳,۴,۵ \xrightarrow{۱۵} ۲,۳,۴,۴ \xrightarrow{۲۴} ۲,۳,۴ \xrightarrow{۲۳} ۱,۴ \xrightarrow{۱۴} ۳$$

۱۲- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

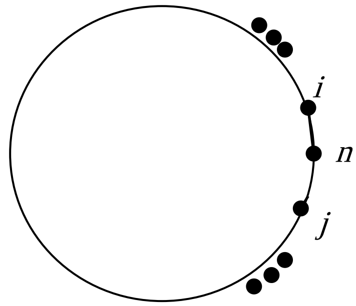
فرض کنید AD نیمساز زاویه A و BM میانه وارد بر ضلع BC باشد و $AD \perp BM$.



در مثلث ABM، ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A برهم منطبق شده‌اند. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و $AM = AB$. پس $AC = ۲AB$. بنابراین اگر $x, x+۱$ و $x-۱$ طول اضلاع مثلث باشند، یکی از این سه عدد دو برابر دیگری است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که این فقط وقتی امکان دارد که $x = ۳$. پس اضلاع مثلث ۲، ۳، ۴ و محیط مثلث برابر ۹ است.

۱۳- ماخ گزینه (د) صحیح است.

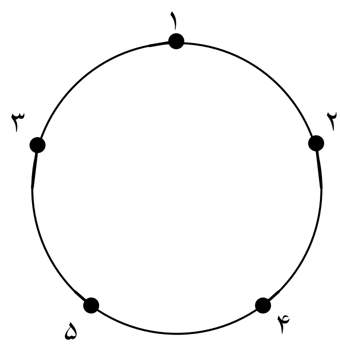
توجه کنید که مسأله معادل با این مسأله است که اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به‌ترتیبی دور دایره بچینیم که مجموع حاصل‌ضرب‌های اعداد مجاور بیشترین مقدار ممکن باشد.



فرض کنید که در حالت کلی اعداد ۱، ۲، . . . و $n-۱$ را به‌ترتیبی دور دایره چیده باشیم و بخواهیم n را اضافه کنیم. اگر $S_{n-۱}$ مجموع مورد نظر در وضعیت اول و S_n مجموع پس از اضافه کردن n بین عددهای i و j باشد آنگاه

$$S_n = S_{n-۱} - ij + ni + nj = S_{n-۱} - (n-i)(n-j) + n^۲$$

پس برای اینکه S_n بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد، باید $(n-i)(n-j)$ کمترین مقدار ممکن را اختیار کند، پس i و j باید اعداد $n-۱$ و $n-۲$ باشند. یعنی در هر گام برای ماکزیمم شدن S_n باید n را بین $n-۱$ و $n-۲$ قرار دهیم.



پس آرایش نشان داده شده در شکل به‌دست می‌آید و می‌توانیم بنویسیم

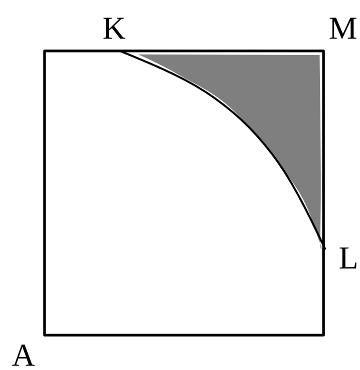
$$S_۵ = ۲ + ۸ + ۲۰ + ۱۵ + ۳ = ۴۸$$

یادداشت. با استدلالی مشابه استدلال بالا می‌توان نشان داد که در حالت کلی، رابطه زیر برقرار است:

$$S_n = \frac{۲n^۳ + ۳n^۲ - ۱۱۸ + ۱۸}{۶}$$

۱۴- گزینه (ج) صحیح است.

روشن است که نقطه‌های A و B و C را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که در یک امتداد نباشند. اگر به مرکز A دایره‌ای به شعاع $r = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ رسم کنیم تا اضلاع مربع را در نقاط K و L قطع کند.



بنابر فرض چون $AB, AC \geq r$، پس B و C درون ناحیه سایه‌دار KLM قرار می‌گیرند. اما محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که $KL = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$. پس $BC < KL = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ که با فرض $x > \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ تناقض دارد.

همچنین به‌سادگی می‌توان دید که در مثلث AKL داریم $x = \sqrt{۶} - \sqrt{۲}$ و بنابراین، بزرگترین مقدار x همین عدد است.

۱۵- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید p عددی اول باشد. نشان می‌دهیم که $f(p)$ نیز عددی اول است. در واقع اگر $q \mid f(p)$، آنگاه عددی مانند r وجود دارد که $q = f(r)$. پس $f(r) \mid f(p)$ و بنابراین، $r \mid p$. پس $r = p$. (توجه کنید که $r \neq ۱$ زیرا به آسانی می‌توان دید که $f(۱) = ۱$.) درنتیجه، $q = f(p)$ و بنابراین، $f(p)$ عددی اول است. همچنین اگر n عددی طبیعی باشد که $f(n)$ توانی از q باشد، آنگاه n توانی از p است، زیرا اگر r عامل اولی از n و مخالف p باشد، آنگاه $f(r) \mid f(n)$ و بنابراین $f(r) = q$ و درنتیجه، $r = p$ که تناقض است. حال توجه کنید که $p \mid p^۲ \mid p^۳ \mid \ldots$ و بنابراین، $q = f(p) \mid f(p^۲) \mid f(p^۳) \mid \ldots$. چون f پوشاست پس همه توان‌های q در برد f قرار دارند. اما چنین اعضایی می‌توانند تنها از اثر f بر توان‌های p به‌دست آیند. پس نتیجه می‌شود که $f(p^i) = q^i$. اکنون به آسانی می‌توان دید که اگر a و b دو عدد طبیعی باشند که $(a,b) = ۱$ آنگاه $f(ab) = f(a)f(b)$. پس اگر $\prod p_i^{\alpha_i}$ تجزیه n به عوامل اول باشد. آنگاه $f(N) = \prod f(p_i)^{\alpha_i}$. ویژگی (ج) به آسانی از این حکم نتیجه می‌شود.

یادداشت. برای گزینه‌های دیگر، می‌توان به روش زیر مثال نقض ساخت. فرض کنید p مجموعه اعداد اول باشد و $\sigma : p \to p$ یک جایگشت باشد، یعنی σ یک به یک و پوشا باشد. حال برای $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ تعریف کنید $f(n) = \prod \alpha(p_i)^{\alpha_i}$.

اگر σ جایگشتی مخالف همانی باشد، (الف) و (ب) نادرست خواهند بود. همچنین با انتخاب $\sigma(۲) = ۵$ و $\sigma(۵) = ۲$ نتیجه می‌شود $f(۲) = ۵$ که مثال نقض (د) است. همچنین اگر σ طوری باشد که $\sigma \circ \sigma \neq ۱$، آنگاه تابع به‌دست آمده از σ، مثال نقض برای گزینه (هـ) است.

۱۶- گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید $A_۰, A_۱, A_۲$ و $A_۳$ مجموعه اعداد طبیعی بین ۱ و ۵۳ باشند که به پیمانه ۴ به‌ترتیب همنهشت با ۰، ۱، ۲ و ۳ هستند. توجه کنید که

$$|A_۰| = |A_۲| = |A_۳| = ۱۳, \quad |A_۱| = ۱۴$$

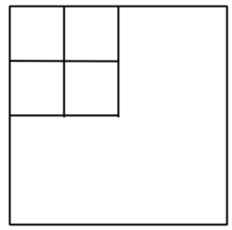
اگر $S \subset \{۱, ۲, \ldots, ۵۳\}$ دارای خاصیت مورد نظر مسأله باشد، واضح است که

$$|S \cap A_۰| \leq ۷, \quad |S \cap A_۲| \leq ۷, \quad |S \cap A_۳| \leq ۷, \quad |S \cap A_۱| \leq ۷$$

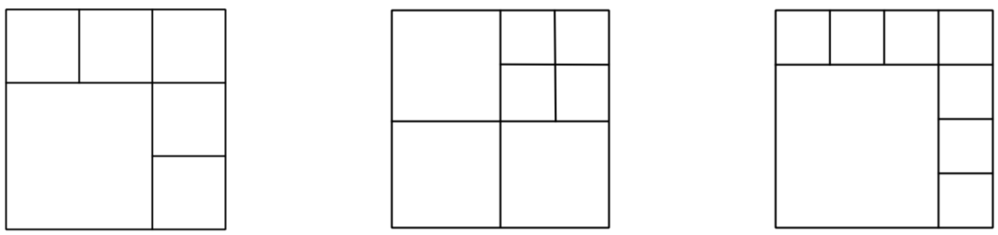
زیرا از بین n و $n + ۴$ حداکثر یکی را می‌توان انتخاب کرد. پس $|S| \leq ۲۸$. به آسانی می‌توان مجموعه S با خاصیت مورد نظر را طوری ساخت که $|S| = ۲۸$.

۱۷- گزینه (هـ) صحیح است.

توجه کنید که اگر بتوان از یک مربع n مربع برید، آن‌گاه می‌توان مطابق شکل، با چهار قسمت کردن یکی از مربع‌ها، آن را به $n+۳$ مربع نیز برید.



همچنین، مطابق شکل‌های زیر، می‌توان یک مربع را به ۶ و ۷ یا ۸ مربع برید.



پس به‌ازای $n \geq ۶$، می‌توان هر مربع را به n مربع افراز کرد.
یادداشت. با کمی بحث، می‌توان ثابت کرد که نمی‌توان یک مربع را به دو، سه یا پنج مربع افراز کرد.

۱۸- گزینه (د) صحیح است.

توجه کنید که اگر اعداد فرد را حذف کنیم، اعداد باقی‌مانده دارای خاصیت مورد نظر مسأله هستند. برای آن که نشان دهیم باید حداقل ۱۰ عدد را حذف کرد، زوج‌های مرتب $(۱,۲),(۳,۲۰),(۴,۱۹),\ldots$ و $(۱۱,۱۲)$ را در نظر بگیرید. از هر زوج باید حداقل یک مؤلفه‌اش حذف شود. پس چون ۱۰ زوج داریم، حذف حداقل ۱۰ عدد لازم است.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که اگر به‌جای ۲۰، عدد زوجی مانند $۲k$ بگذاریم، باید حداقل k عدد را حذف کنیم تا مجموع هیچ دو عدد باقی مانده اول نباشد. این مطلب را به استقرا نشان می‌دهیم. فرض کنید p عددی اول بین $۲k$ و $۴k$ باشد. وجود چنین عدد اولی از قضیه چبیشف نتیجه می‌شود. اکنون زوج‌های مرتب $(۲k,p-۲k),(۲k-۱,p-۲k+۱),\ldots$ و $(\frac{p+۱}{۲},\frac{p-۱}{۲})$ را درنظر بگیرید. با استدلالی مشابه استدلال بالا باید حداقل به تعداد $۲k-\frac{p-۱}{۲}$ از این اعداد حذف شوند. همچنین از بین اعداد ۱، ۲، . . . و $p-۲k-۱$ نیز باید حداقل تعداد $\frac{p-۲k-۱}{۲}$ حذف شوند (فرض استقرا). توجه کنید که این دو مجموعه از اعداد هیچ اشتراکی ندارند (این مطلب از این که $p<۴k$ نتیجه می‌شود). پس دست‌کم $۲k-\frac{p-۱}{۲}+\frac{p-۲k-۱}{۲}=k$ عدد باید حذف شوند.

-۱۹ گزینه (ب) صحیح است.

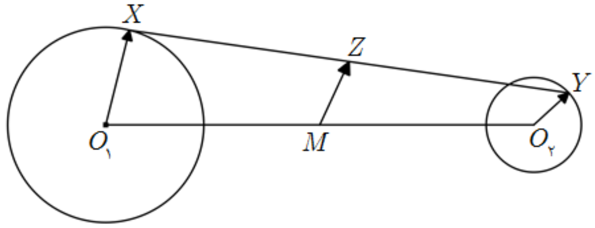
توجه کنید که $A = ۱۰^{۸۱} - ۱$. بنابراین، $A^۲ = ۱۰^{۱۶۲} - ۲\times ۱۰^{۸۱} + ۱$ پس نمایش دهدهی $A^۲$ به‌صورت زیر است:

$$A^۲ = ۹۹...۹۸۰۰...۰۱$$

پس مجموع رقم‌های $A^۲$ در پایه ۱۰ برابر $۹\times ۸۰ + ۸ + ۱ = ۷۲۹$ است.

-۲۰ گزینه (ب) صحیح است.

با توجه به شکل فرض کنید $O_۱$ مرکز دایره $C_۱$ و $O_۲$ مرکز دایره $C_۲$ را نشان دهد.
همچنین X را نقطه‌ای روی $C_۱$ و Y را نقطه‌ای روی $C_۲$ بگیرید. اگر Z وسط پاره‌خط XY و M وسط $O_۱O_۲$ را نشان دهد.



می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MZ} &= \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MY})\\ &= \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{MO_۱} + \overrightarrow{O_۱X} + \overrightarrow{MO_۲} + \overrightarrow{O_۲Y})\\ &= \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{O_۱X} + \overrightarrow{O_۲Y})\end{aligned}$$

توجه کنید که

$$|\overrightarrow{O_۱X}| = ۳$$

و

$$|\overrightarrow{O_۲Y}| = ۱$$

-۲۱ گزینه (هـ) صحیح است.

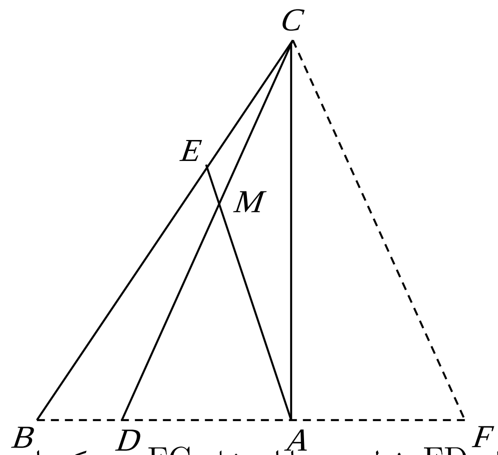
ثابت می‌کنیم مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۱ خوب است. استدلال در بقیه‌ی موارد نیز مشابه است. دنباله موردنظر را به طور استقرایی می‌سازیم. فرض کنید $a_۱ = ۲$ و اعداد $a_۱, a_۲, ...$ و a_n را ساخته‌ایم و m کوچکترین عدد طبیعی است که در این بین نیامده است. عدد طبیعی k را آن‌قدر بزرگ انتخاب کنید که عدد kma_n در این فهرست نیامده باشد. حال قرار دهید $a_{n+۱} = kma_n, a_{n+۲} = m$. روشن است که هر عدد طبیعی سرانجام در این دنباله خواهد آمد. همچنین توجه کنید که

$$\begin{aligned}(a_n, a_{n+۱}) &= (a_n, kma_n) = a_n > ۱\\ (a_{n+۱}, a_{n+۲}) &= (kma_n, m) = m > ۱\end{aligned}$$

بنابراین مجموعه $\mathbb{N} - \{۱\}$ مجموعه‌ای خوب است.

-۲۲ گزینه (د) صحیح است.

از نقطه C خطی به موازات AE رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در نقطه F قطع کند. در مثلث BCF، چون $AE \parallel CF$ و $BE = ۲EC$ نتیجه می‌شود $AB = ۲AF$ و بنابراین، $DA = AF$.



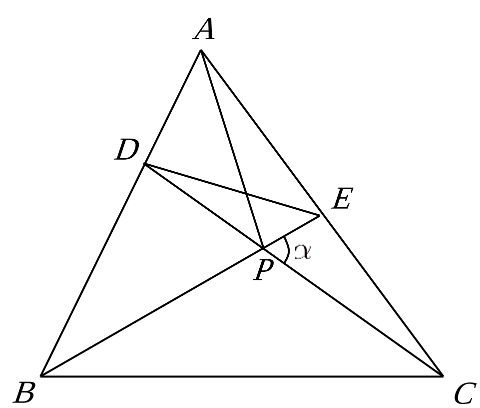
حال در مثلث FCD، از نقطه A، وسط ضلع FD، خطی به موازات ضلع FC رسم کرده‌ایم. پس اگر M محل تلاقی AE و CD باشد، $DM = CM$. چون $\angle ADC = \angle BAE$، پس مثلث ADM متساوی‌الساقین است و درنتیجه $DM = AM$. پس میانه وارد بر ضلع CD از مثلث ACD، برابر نصف این ضلع است. پس $\angle A = ۹۰^\circ$.

-۲۳ گزینه (ج) صحیح است.

مساحت شکل Δ را با $[\Delta]$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $x = [DEP]$ و $y = [PBC]$. اگر زاویه $\angle DPE$ برابر α باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} xy &= [DEP].[PBC] \\ &= \frac{۱}{۴} PE.DP.PB.PC.\sin^۲ \alpha \\ &= [PEC].[PDB] \\ &= ۸ \times ۳ \\ &= ۲۴ \end{aligned}$$



بنابر قضیه منلائوس در مثلث CAD،

$$\frac{BA}{BD}=\frac{PD}{PC}.\frac{CE}{EA}=۱$$

اما،

$$\frac{BA}{BD}=\frac{[AEB]}{[DEB]}=\frac{x+۱۳}{x+۸},\qquad \frac{PD}{PC}=\frac{[EPD]}{[EPC]}=\frac{x}{۳}$$

و

$$\frac{CE}{EA}=\frac{[DCE]}{[DEA]}=\frac{x+۳}{۵}$$

بنابراین،

$$x(x+۱۳)(x+۳)=۱۵(x+۸)$$

معادله فوق دارای ریشه $x=۲$ است. بنابراین، $y=۱۲$ و مساحت مثلث برابر ۳۰ است.

۲۴- ماخ گزینه (هـ) صحیح است.

با استفاده از الگوریتم اقلیدس می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} d_n &= (a_n,b_n)\\ &= (n^۳-۵n^۲+۶n, n^۲+۵)\\ &= (n^۲+۵, n+۲۵)\\ &= (n+۲۵, ۶۳۰) \end{aligned}$$

پس $d_n\leq ۶۳۰$. چون $d_{۶۰۵}=۶۳۰$، بنابراین، $\max\{d_n \mid n\in N\}$.

همچنین بدیهی است که

$$d_{n+۶۳۰}=(n+۶۳۰+۲۵,۶۳۰)=(n+۲۵,۶۳۰)=d_n$$

و بنابراین، d_n متناوب است.

۲۵- ماخ این مساله نادرست است.

فرض کنید $t=\frac{a}{b}$ که $a,\ b=۱$. در این صورت

$$f(t)=۳t^۳+۱۰t^۲-۳t=\frac{۳a^۳+۱۰a^۲b-۳ab^۲}{b^۳}$$

اگر $f(t)\in\mathbb{Z}$، آنگاه $b\mid ۳a^۳+۱۰a^۲b-۳ab^۲$ و درنتیجه $b\mid ۳a^۳$. اما چون $(b,a)=۱$ پس $b\mid ۳$ یعنی b یکی از اعداد ۱ یا ۳ خواهد بود. اگر $b=۱$، آن‌گاه باید $۰\leq a\leq ۷۷$ و ۷۸ انتخاب برای a وجود دارد.

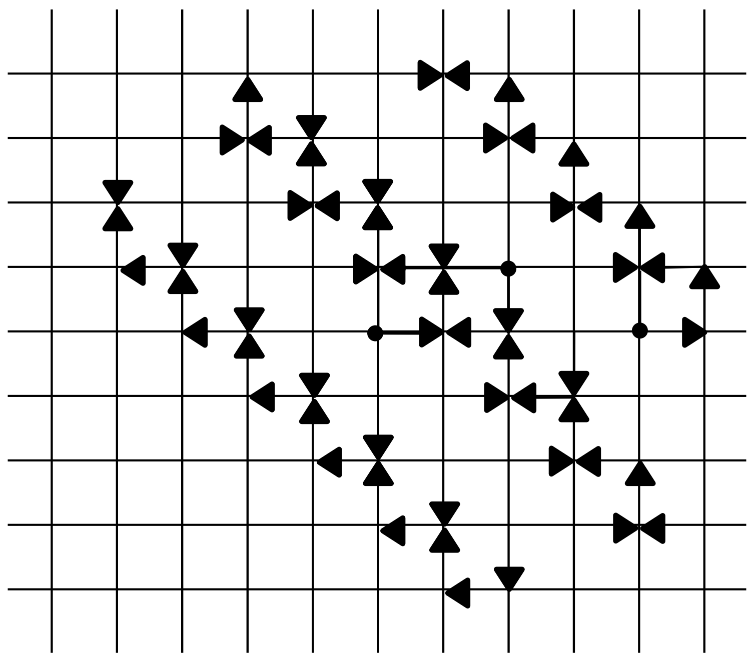
اگر $b=3$، نتیجه می‌شود که $27 \mid 3a^3+30a^2-27a$ و بنابراین $9 \mid a^3+10a^2$ و چون $(a,3)=1$ پس $9 \mid a+10$. یعنی $a=9k-1$ که $k\in\mathbb{Z}$. پس از شرط $0\le t\le 77$ نتیجه می‌شود

$$0 \le \frac{9k-1}{3} \le 77$$

و در نتیجه $1\le k\le 25$. پس ۲۵ انتخاب برای k و بنابراین، برای a وجود دارد. بنابراین در مجموع ۱۰۳ انتخاب برای t وجود دارد که در بین گزینه ها وجود ندارد.

۲۶- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

در شکل زیر مسیر حرکت یک نقطه مشخص شده است. توجه کنید که چون $10 \overset{4}{\equiv} 2$، در صورت مسأله می‌توان به جای نقطه $(0,10)$، از نقطه $(0,2)$ استفاده کرد.



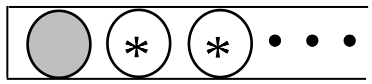
پس کافی است از نقطه $(0,2)$ شروع کنیم و ۱۰۰ گام به عقب برگردیم. اگر حرکت به چپ، راست، بالا و پایین را به ترتیب با L، R، U و D نشان دهیم، با کمی دقت می‌توان دید که برای بازگشت، فقط دو راه وجود دارد:

$$DRDR...DRDR, \qquad DRDR...DRDL$$

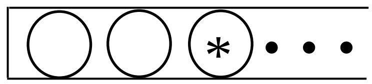
(در واقع اگر مسیر دیگری را انتخاب کنیم، پیش از ۱۰۰ گام، متوقف می‌شویم.)

۲۷- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید a_n تعداد روشهای چیدن n سکه در یک ردیف باشد که هیچ دو سکه مجاوری به رو نباشد. ادعا می‌کنیم که $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$. برای اثبات توجه کنید که اگر اولین سکه به پشت باشد، $n-۱$ سکه بعدی به $a_{n-۱}$ طریق می‌توانند چیده شوند.



اما اگر اولین سکه به رو گذاشته شود، سکه مجاور آن باید حتماً به پشت باشد و $n-۲$ سکه بعدی به $a_{n-۲}$ روش می‌توانند قرار بگیرند.



حال با توجه به اینکه $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$، به آسانی نتیجه می‌شود $a_{۱۰} = ۱۴۴$.

۲۸- ماخ گزینه (ب) صحیح است.

معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$۲x^۲y^۲ + y^۲ - ۲۶x^۲ - ۱۳ = ۱۲۰۱ - ۱۳ = ۱۱۸۸$$

یا

$$(۲x^۲ + ۱)(y^۲ - ۱۳) = ۴ \times ۲۷ \times ۱۱$$

با توجه به این‌که $۲x^۲ + ۱$ عددی فرد است، این عدد، باید برابر با یکی از اعداد ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۱۱، ۳۳، ۹۹ یا ۲۹۷ باشد. اما از حل معادله $۲x^۲ + ۱ = a$ به ازای این مقادیر a، فقط جوابهای $x = ۱,۲,۴,۷$ به دست می‌آیند. اما به ازای این مقادیر x، معادله به صورت $y^۲ = ۴۰۹,۱۴۵,۴۹,۲۵$ در می‌آید که فقط دو جواب آخر قابل قبول‌اند. پس معادله دارای دو جواب $(x,y) = (۴,۷)$ و $(x,y) = (۷,۵)$ است.

۲۹- ماخ گزینه (ج) صحیح است.

فرض کنید که تابع f با شرایط داده شده وجود داشته باشد. ادعا می‌کنیم که $۳۰ \mid n$. برای اثبات، توجه کنید که برای هر $x \neq ۱$، مدار x، یعنی مجموعه $\{x, f(x), f^۲(x), ...\}$ مجموعه‌ای n عضوی است. همچنین اگر مدار x را با $O(x)$ نشان دهیم، هر دو مجموعه $O(x)$ و $O(y)$ یا مساوی و یا جدا از هم‌اند. زیرا اگر $O(x) \cap O(y) \neq \phi$ و مثلاً $z = f^i(X) = f^j(y)$، آنگاه چون تابع f یک‌به‌یک و پوشاست (این مطلب از شرط اول به سادگی نتیجه می‌شود)، پس اگر $i > j$ نتیجه می‌شود $f^{i-j}(x) = y$ و بنابراین، $y \in O(x)$. پس $O(y) = O(x)$. حال چون مجموعه $\{۱,۲,...,۳۰\}$ به تعدادی مجموعه که تعداد اعضای هر کدام برابر n است افراز شده است، پس $۳۰ \mid n$ و در بین گزینه‌ها، فقط گزینه (ج) در این شرط صدق می‌کند.

یادداشت. توجه کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند n که $۳۰ \mid n$، چنین تابعی وجود دارد. کافی است f را چنین تعریف کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x=1\\ (x+\frac{30}{n}) \pmod{30} & x\neq 1\end{cases}$$

به سادگی می‌توان این مسأله را برای حالتی که ۳۱ با عدد طبیعی دلخواهی عوض شده باشد، تعمیم داد.

۳۰- ماخ گزینه (د) صحیح است.

ابتدا همه زوجهای $(a_1,a_2),(a_2,a_3),\ldots$ و (a_{m-1},a_m) را در نظر بگیرید. با توجه به شرط دوم، این $m-1$ زوج مرتب، دوبه‌دو متمایزند. اما چون $a_i\in\{1,2,3,\ldots,10\}$، پس حداکثر ۱۰۰ زوج مرتب به صورت (a_i,a_{i+1}) وجود دارند. پس $m-1\leq 100$ و بنابراین، $m\leq 101$. حال ثابت می‌کنیم که چنین دنباله‌ای به طول ۱۰۱ وجود دارد. برای اثبات، در حالت کلی ثابت می‌کنیم که اگر ۱۰ را با عدد طبیعی n جایگزین کنیم، دنباله‌ای به طول n^2+1 با شرایط مسأله وجود دارد و این دنباله دارای این شرط اضافی نیز هست که $a_1=a_{n^2+1}=1$. این مطلب را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=1$ دنباله ۱، ۱ در شرط مسأله صدق می‌کند. فرض کنید که برای عدد طبیعی n دنباله $a_1,a_2,\ldots,a_{n^2+1}$ را ساخته باشیم که $a_1=1$ و $a_{n^2+1}=1$. حال دنباله را به صورت زیر ادامه می‌دهیم:

$$1,n+1,2,n+2,\ldots,n-1,n+1,n,n+1,n+1,1$$

توجه کنید که $2n+1$ جمله به دنباله قبلی افزوده‌ایم. به سادگی می‌توان دید که دنباله فوق دنباله‌ای به طول $(n+1)^2+1$ است که جمله‌های اول و آخر آن برابر ۱ هستند و در شرایط مسأله نیز صدق می‌کند.